

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «БРЯНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Рыжик В.Н.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к расчетно-графическим работам
по
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

для студентов II курса

БРЯНСК 2011 г.

УДК 512.8
ББК 22.1Я73
Р 93

РЫЖИК, В.Н. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ/ В.Н. РЫЖИК.- Брянск.- Издательство Брянской ГСХА, 2011. - 52 с.

Методические указания к расчетно-графическим работам по высшей математике предназначены для студентов, обучающихся по специальности «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства» - 110302. Рекомендуются для закрепления студентами теоретических знаний по темам «Функции нескольких переменных», «Кратные и криволинейные интегралы», «Элементы теории поля».

Рецензент: заведующий кафедрой электротехнологий,
к.т.н., доцент Безик В.А.

Рекомендовано к изданию методической комиссией инженерного факультета от декабря 2011 г., протокол №

© Рыжик В.Н., 2011

© ФГБОУ ВПО «Брянская ГСХА», 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Функции нескольких переменных	4
1. Функция двух переменных и ее область определения.....	4
2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных.....	15
3. Экстремум функции.....	17
II. Двойные и тройные интегралы. Криволинейные интегралы	26
1. Двойной интеграл (основные понятия и определения).....	26
2. Тройной интеграл (основные понятия и определения).....	32
3. Криволинейные интегралы.....	33
III. Элементы теории поля	45

ВВЕДЕНИЕ

Цель расчетно-графических работ – закрепление студентами теоретических знаний по темам «Функции нескольких переменных», «Кратные и криволинейные интегралы», «Элементы теории поля»; умение применять математические расчеты и формулы к задачам физики, механики.

Задачи, которые входят в данную работу, должны выдаваться студентам для самостоятельного решения. Каждое задание – индивидуальное.

Все задания снабжены краткими теоретическими сведениями. Для каждого задания рассмотрено решение типового примера.

I. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функция двух переменных и ее область определения

Определение. Переменная z называется функцией двух переменных x и y , если:

- 1) задано множество G пар численных значений x и y ;
- 2) задан закон, по которому каждой паре чисел $(x; y)$ из этого множества соответствует единственное численное значение.

При этом переменные x и y называются аргументами или независимыми переменными. Обозначения функций двух переменных аналогичны обозначениям функций одной переменной:

$$z = f(x; y), z = \varphi(x; y), z = z(x; y), z = F(x; y) \text{ и т.д.}$$

При нахождении частного значения z_0 функции $z = f(x; y)$, которое она принимает при заданных значениях аргументов $x = x_0$ и $y = y_0$, пишут или

$$z_0 = z|_{(x=x_0; y=y_0)} \quad \text{или} \quad z_0 = f(x_0; y_0)$$

Определение. Множество G всех пар значений аргументов данной функции двух переменных называется областью определения этой функции.

Например, областью определения функции $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ является множество, для которого $1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$. Множество $z = f(x; y)$ таких точек образует внутренность круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Графиком функции двух переменных в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве является в общем случае поверхность.

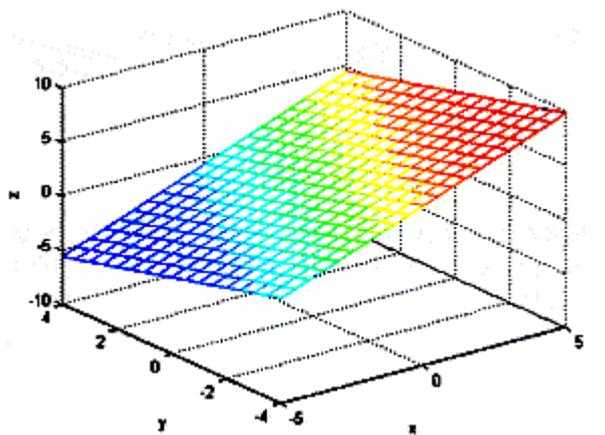
Линией уровня функции $z = f(x; y)$ называется линия $f(x; y) = C$ на плоскости $ХОУ$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$.

Аналогично $U = f(x; y; z)$ функция трех переменных.

Некоторые примеры поверхностей:

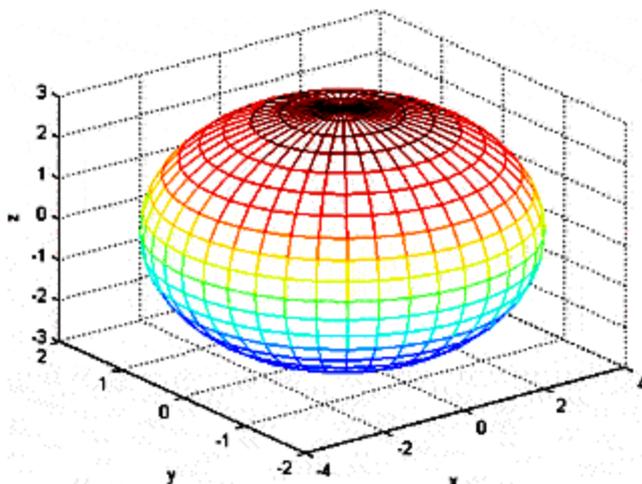
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Уравнение плоскости



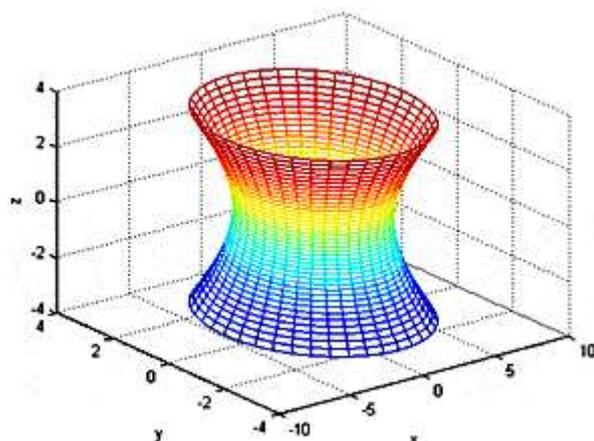
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Эллипсоид



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

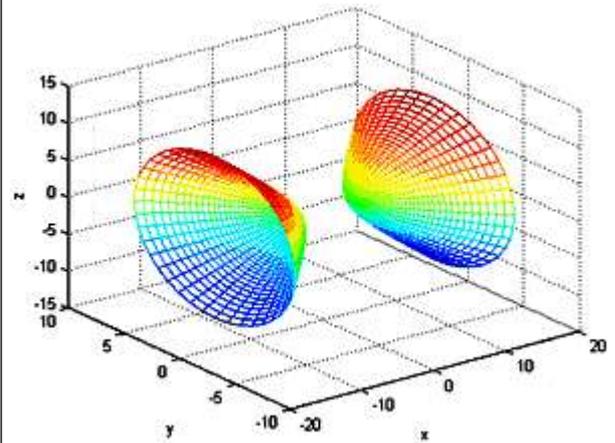
Однополостный гиперболоид



$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

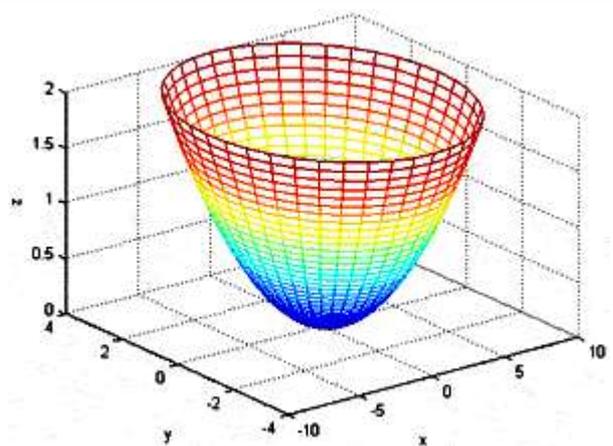
Каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$



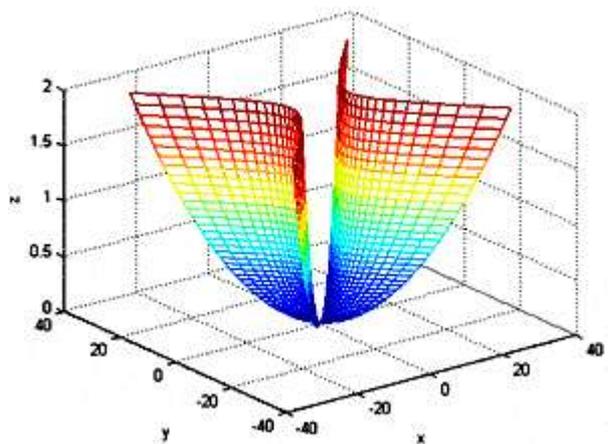
Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0).$$



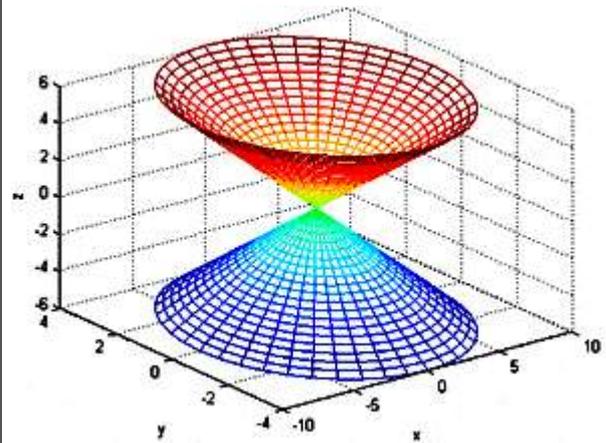
Эллиптический параболоид

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$



Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Действительный конус

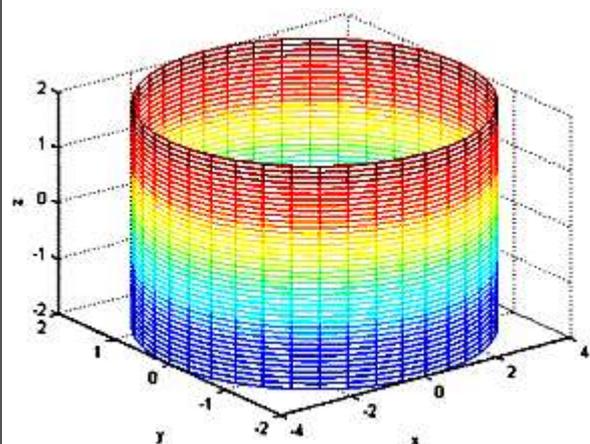
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Гиперболический цилиндр



Эллиптический цилиндр

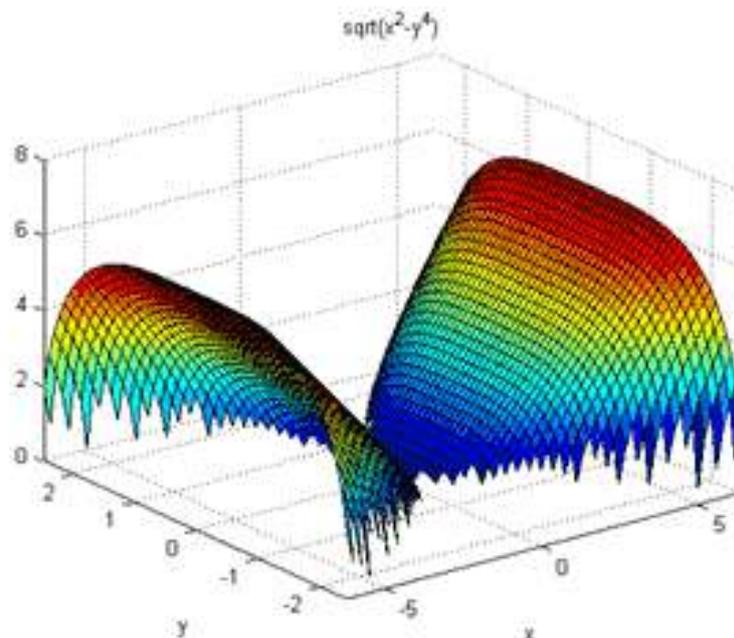


График функции $\sqrt{x^2 - y^4}$

Примеры построения некоторых поверхностей.

Пример 1.

Определение 1. Конусом второго порядка называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где a, b, c -- положительные числа.

Замечание 1. С математической точки зрения поверхность(1) лучше определять с помощью уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2, \tag{1.1}$$

так как в нем меньше параметров, но при этом, во-первых, теряется аналогия с уравнениями предыдущих поверхностей, а во-вторых, если считать, что величины a, b, x, y, z имеют размерность длины, то в уравнении(1.1) размерности правой и левой части не согласуются.

Для краткости в дальнейшем конус второго порядка будем называть просто конус. Исследуем форму конуса. Так же, как эллипсоид и гиперболоиды, он имеет три плоскости симметрии, три оси симметрии и центр симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

Для построения конуса найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью xOy . На этой плоскости $z = 0$, поэтому

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Координаты только одной точки плоскости xOy могут удовлетворять данному уравнению, а именно, начала координат. Найдем линию пересечения с плоскостью. На этой плоскости $x = 0$, поэтому

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Это уравнение пары прямых $z = \pm \frac{c}{b}y$ на плоскости yOz . Построим эти прямые (рис. 1). Сечение плоскостью xOz также является парой прямых с уравнением $z = \pm \frac{c}{a}x$. Нарисуем и эти прямые (рис. 1).

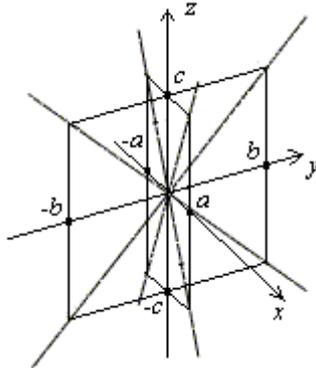


Рис.1.Сечения конуса координатными плоскостями

Найдем линии пересечения поверхности с плоскостями $z = \pm h, h > 0$, Уравнения этих линий

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = \pm h. \end{cases}$$

Первое уравнение преобразуем к виду

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2 h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{b^2 h^2}{c^2}\right)} = 1,$$

то есть к виду

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{1.2}$$

где $a_1 = \frac{ah}{c}$; $b_1 = \frac{bh}{c}$. Уравнение(1.2) является уравнением эллипса. Нарисуем полученные сечения (рис. 2).

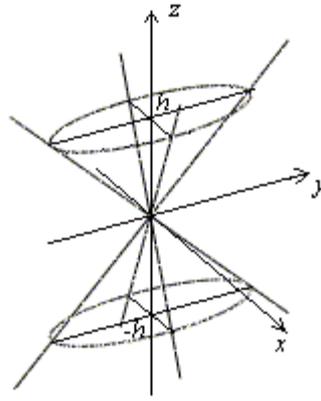


Рис.2. Изображение конуса с помощью сечений

Привычное для глаза изображение приведено на рисунке 3.

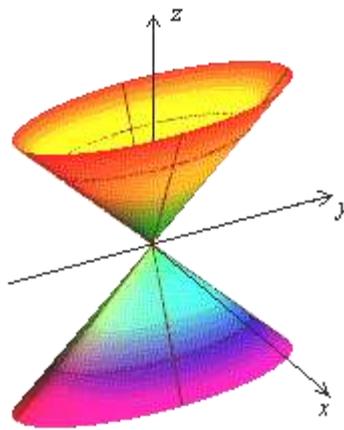


Рис.3. Конус

Точка пересечения конуса с плоскостью xOy называется вершиной конуса.

Если в уравнении $a = b$, то сечения конуса плоскостями параллельными плоскости являются окружностями. В этом случае поверхность называется прямым круговым конусом и может быть получена вращением прямой, лежащей в плоскости yOz , вокруг оси Oz . Именно с таким конусом мы имеем дело в школьном курсе математики.

Пример 2.

Определение 2. Цилиндрической поверхностью называется геометрическое место параллельных прямых, пересекающих данную линию. Эта линия называется направляющей, а параллельные прямые -- образующими.

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y) = 0 \quad ($$

2)

и покажем, что оно определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz . Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ -- некоторая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению. Поскольку в это уравнение не входит явно переменная z , ему будут удовлетворять координаты всех точек $M_0(x_0; y_0; z)$, где z -- любое число. Следовательно, при любом z точка M лежит на поверхности, определяемой уравнением(2). Отсюда следует, что на поверхности целиком лежит прямая, проходящая через точку M_0 параллельно оси Oz . А это означает, что поверхность, определяемая уравнением(2), составлена из прямых, параллельных оси Oz , то есть она является цилиндрической поверхностью.

Заметим, что на плоскости xOy уравнение(2) определяет направляющую рассматриваемой цилиндрической поверхности.

Итак, делаем вывод, что если уравнение поверхности не содержит в явном виде какой-либо переменной, то это уравнение определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси отсутствующего переменного и направляющей, которая в плоскости двух других переменных имеет то же самое уравнение.

Нас будут интересовать только те цилиндрические поверхности, которые являются поверхностями второго порядка, а это значит, что уравнение(2), их задающее будет иметь вид(2.1).

Определение 3 Поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.1)$$

называется эллиптическим цилиндром, поверхность, которая задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.2)$$

называется гиперболическим цилиндром, а которая задается уравнением

$$y^2 = 2px, \quad (2.3)$$

называется параболическим цилиндром.

Для того чтобы построить поверхность, задаваемую уравнением (2.1) или уравнением (2.2), или (2.3), достаточно нарисовать на плоскости xOy направляющую, уравнение которой на этой плоскости совпадает с уравнением самой поверхности, и затем через точки направляющей провести образующие параллельно оси Oz . Для наглядности следует построить также одно-два сечения плоскостями, параллельными плоскости xOy . В каждом таком сечении получим такую же кривую, как и исходная направляющая. Изображения этих цилиндров сечениями приведены на рисунках 2.1, 2.3 и 2.5, а их объемные изображения -- на рисунках 2.2, 2.4 и 2.6.

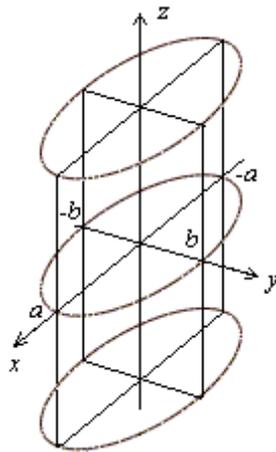


Рис.2.1. Изображение эллиптического цилиндра с помощью сечений

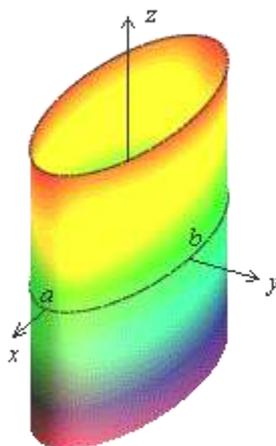


Рис.2.2. Эллиптический цилиндр

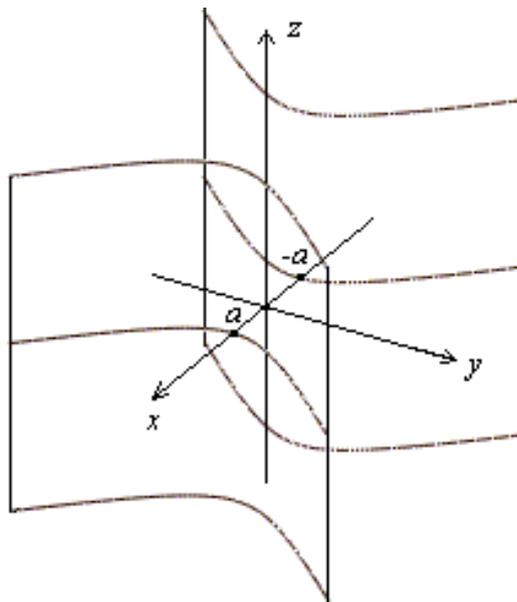


Рис.2.3. Изображение гиперболического цилиндра с помощью сечений

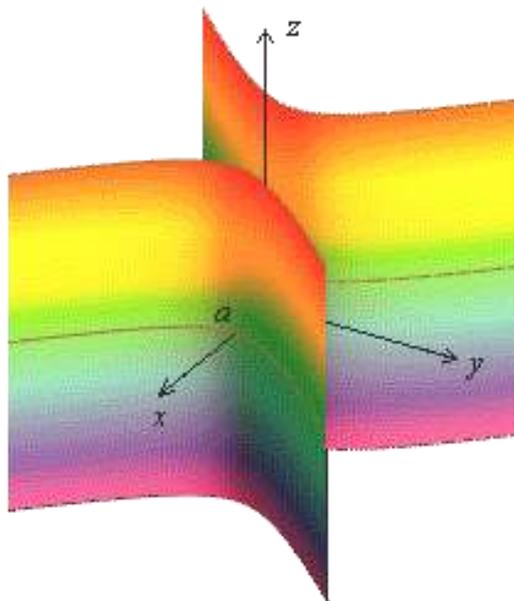


Рис.2.4. Гиперболический цилиндр

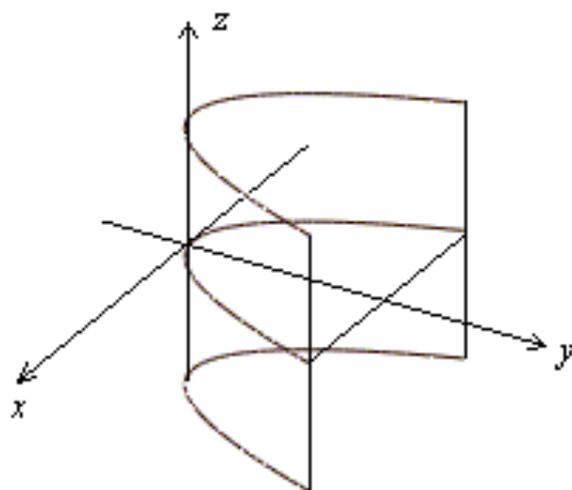


Рис.2.5. Изображение параболического цилиндра с помощью сечений

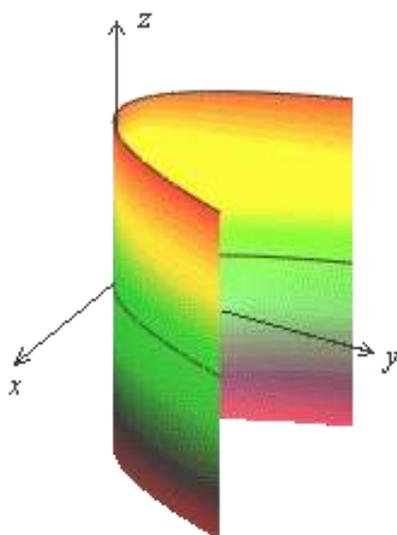


Рис.2.6. Параболический цилиндр

2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y)$$

, вычисленная при постоянном y .

Частной производной по y называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y)$$

, вычисленная при постоянном x . Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Пример. $z = x^2y - 3y^2 + 5x$.

Рассматривая y как постоянную величину ($y = const$), получим $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 5$.

Рассматривая x как постоянную величину ($x = const$), получим $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6y$.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, где Δx и Δy произвольные приращения аргументов. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x, y) , если в этой точке полное приращение можно представить в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz , линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy , то есть $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Для функции трех переменных $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ справедливы приближенные равенства $\Delta z \approx dz$; $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz$, которые применяются для приближенного вычисления значения функции $f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$. (*)

Пример 3. Вычислить приближенное значение: $1,08^{3,96}$.

Решение. Полагая, что $1,08^{3,96}$ есть частное значение функции $f(x, y) = x^y$ в точке $M_1(1,08; 3,96)$ и что вспомогательная точка будет $M_0(1; 4)$, получим $f(M_0) = 1^4 = 1$

$$f'_x(M_0) = yx^{y-1} |_{(x=1; y=4)} = 4; f'_y(M_0) = x^y \ln x |_{(x=1; y=4)} = 0; \Delta x = 1,08 - 1 = 0,08; \Delta y = 3,96 - 4 = -0,04.$$

Подставляя в формулу (*), найдем:

$$1,08^{3,96} \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y = 1 + 4 \cdot 0,08 = 1,32.$$

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Смешанные производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Дифференциалом второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее полного дифференциала, то есть $d^2 z = d(dz)$. Если x и y – независимые переменные и функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные, то дифференциал второго порядка вычисляется по формуле:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Пример. $z = y \ln x$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. Найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$. Дифференцируя

повторно, получим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (\ln x) = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

3. Экстремум функции

Необходимое условие экстремума: если дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, то есть: $\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = 0$.

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Стационарные точки и точки, в которых производные не существуют и которые лежат внутри области определения функции, называются *критическими точками*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточное условие существования экстремума:

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ стационарная точка функции $z = f(x; y)$. Обозначим $A = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2}$ и составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$.

Тогда:

если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум, при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум, при $A > 0$ (или $C > 0$);

если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;

если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

Замечание: $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$

Индивидуальные задания 1.

Задача 1

Задача 1. Дана функция $z = f(x; y)$. Проверить, удовлетворяет ли она данному уравнению.

- | | | |
|-------|--|--|
| 1.1. | $z = e^{\frac{x}{y}}$; | $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.2. | $z = e^{xy}$; | $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.3. | $z = e^{-\cos(ax+y)}$; | $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. |
| 1.4. | $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$; | $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.5. | $z = \sin^2(y - ax)$; | $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. |
| 1.6. | $z = \frac{y}{x}$; | $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.7. | $z = y \sqrt{\frac{y}{x}}$; | $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.8. | $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; | $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.9. | $z = \frac{\sin(x-y)}{x}$; | $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.10. | $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$; | $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$. |
| 1.11. | $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$; | $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$. |
| 1.12. | $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; | $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$. |
| 1.13. | $z = e^{xy}$; | $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |
| 1.14. | $z = \ln(x + e^{-y})$; | $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$. |
| 1.15. | $z = \frac{x}{y}$; | $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. |
| 1.16. | $z = x^y$; | $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}$. |
| 1.17. | $z = x e^{\frac{y}{x}}$; | $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. |

- 1.18. $z = \sin(x + ay)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.
- 1.19. $z = \cos y + (y - x) \sin y$; $(x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
- 1.20. $z = \cos^3(3x - 5y)$; $\frac{5}{3} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
- 1.21. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{2y}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
- 1.22. $z = y \ln(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
- 1.23. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.
- 1.24. $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.
- 1.25. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.
- 1.26. $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$.
- 1.27. $z = xe^{-\frac{y}{x}}$; $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
- 1.28. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$; $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
- 1.29. $z = e^{\frac{y}{x}}$; $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

Решение типового примера:

Пример.

Дана функция $z = \ln(2xy + x^2)$ проверить удовлетворяет ли она уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - (y + x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln(2xy + x^2))'_x = \frac{2y + 2x}{2xy + x^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln(2xy + x^2))'_y = \frac{2x}{2xy + x^2};$$

Полученные значения подставляем в исходное уравнение.

$$x \frac{2y + 2x}{2xy + x^2} - (y + x) \frac{2x}{2xy + x^2} = 0;$$

$$\frac{2xy + 2x^2}{2xy + x^2} - \frac{2xy + 2x^2}{2xy + x^2} = 0; \quad 0 = 0 - \text{верно.}$$

Ответ: функция удовлетворяет уравнению.

Задача 2

Задача 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции в замкнутой области.

- | | | |
|-------|---|--|
| 2.1. | $z = x^2 + y^2 - xy + x + y;$ | $D: x=0; y=0; x+y=-3.$ |
| 2.2. | $z = 2x + y - xy;$ | $D: 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4.$ |
| 2.3. | $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1;$ | $D: x=0; y=0; x+y=3.$ |
| 2.4. | $z = x^3 + y^3 - 3xy;$ | $D: 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3.$ |
| 2.5. | $z = xy;$ | $D: x^2 + y^2 \leq 1.$ |
| 2.6. | $z = x^2 + 3y^2 + x - y;$ | $D: x=1; y=1; x+y=1.$ |
| 2.7. | $z = x^2 - xy + y^2 - 4x;$ | $D: x=0; y=0; 2x+3y-14=0.$ |
| 2.8. | $z = \frac{1}{2}x^2 - xy;$ | $D: y = \frac{1}{3}x^2; y=3.$ |
| 2.9. | $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;$ | $D: x=0; y=0; x=1; y=2.$ |
| 2.10. | $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$ | $D: y=1; y=-1; x=0; x=2.$ |
| 2.11. | $z = xy - 2x - y;$ | $D: 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4.$ |
| 2.12. | $z = x^2 + xy;$ | $D: -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 3.$ |
| 2.13. | $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;$ | $D: x \leq 0; y \leq 0; x+y+2=0.$ |
| 2.14. | $z = 10 + 2xy - x^2;$ | $D: 0 \leq y \leq 4 - x^2.$ |
| 2.15. | $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4;$ | $D: x \geq -1; y \geq -1; x+y \leq 1.$ |
| 2.16. | $z = x^2 + 2xy + 2y^2;$ | $D: -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2.$ |
| 2.17. | $z = x^2 + 3xy^2 + x - y;$ | $D: x \geq 1; y \geq -1; x+y \leq 1.$ |
| 2.18. | $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2;$ | $D: x \leq 1; y \geq 0; y \leq x.$ |
| 2.19. | $z = x^2 + 2y^2 - 1;$ | $D: x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq 3.$ |
| 2.20. | $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27;$ | $D: 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2.$ |
| 2.21. | $z = xy - x - 2y;$ | $D: y = x; x = 3; y = 0.$ |
| 2.22. | $z = x^2 + xy - 3x - y;$ | $D: 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3.$ |
| 2.23. | $z = xy - 3x - 2y;$ | $D: 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4.$ |
| 2.24. | $z = 3x + y - xy;$ | $D: y = x; y = 4; x = 0.$ |
| 2.25. | $2z = x^2 - 2xy;$ | $D: y = 2x^2; y = 8.$ |
| 2.26. | $z = 5x^2 - 3xy + y^2;$ | $D: -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1.$ |
| 2.27. | $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2;$ | $D: x=0; y=0; x+y+2=0.$ |
| 2.28. | $z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4y;$ | $D: y = 2x; y = 2; x = 0.$ |
| 2.29. | $z = x^2 + xy - 2;$ | $D: y = 4x^2 - 4; y = 0.$ |

Решение типового примера:

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

Решение. 1. Находим первые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0 \quad M(0,0), z(0,0) = 0$$

2. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе, то есть на окружности $x^2 + y^2 = 4$ ($y^2 = 4 - x^2$), то для точек окружности функцию $z = x^2 - y^2$ можно представить как функцию одной переменной x : $z = x^2 - (4 - x^2)$, то есть $z = 2x^2 - 4$, причем $-2 \leq x \leq 2$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения этой функции. Находим критические точки функции в интервале $(-2; 2)$ и вычислим значения функции в этих точках и на концах интервалов: $z' = 4x$, $4x = 0$.

Отсюда имеем критическую точку $x = 0$; $z_{(x=0)} = -4$. На концах интервала $(-2; 2)$: $z_{(x=-2)} = 4$; $z_{(x=2)} = 4$.

3. Выпишем полученные значения функции:

$$z_{(x=0; y=0)} = 0, \quad z_{(x=-2; y=0)} = -4, \quad z_{(x=2; y=0)} = 4$$

Отсюда видим, что функция имеет наибольшее значение, равное 4, и наименьшее значение, равное -4.

Замечание. Если граница области определения функции состоит из нескольких частей, например, треугольник или прямоугольник, то находят наибольшее и наименьшее значения функции на каждой части, а затем сравнивают.

Задача 3

Задача 3. Исследовать функцию на экстремум

- 3.1 $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
- 3.2. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
- 3.3. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.
- 3.4. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
- 3.5. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.
- 3.6. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
- 3.7. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$, $(x > 0, y > 0)$.
- 3.8 . $z = \frac{1}{2}xy + (47 + x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.
- 3.9. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.
- 3.10. $z = x^2 y(2 - x - y)$, $(x > 0, y > 0)$.
- 3.11. $z = y^2(1 - x - y)$.
- 3.12. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $(x > 0, y > 0)$.
- 3.13. $z = e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2)$.
- 3.14. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
- 3.15. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $(x > 0, y > 0)$.
- 3.16. $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$, $(x > 0, y > 0)$.
- 3.17. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
- 3.18. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
- 3.19. $z = 1 + 6x - x^2 - xy + y^2$.
- 3.20. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
- 3.21. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
- 3.22. $z = 2xy - 2x - 4y$.
- 3.23. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.
- 3.24. $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$.
- 3.25. $z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$.
- 3.26. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.
- 3.27. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$.
- 3.28. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
- 3.29. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

Решение типового примера.

Пример 1. Найти экстремум функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Решение. Находим частные производные первого порядка z'_x и z'_y и критические точки, в которых они равны нулю или не существуют: $z'_x = 3x^2 - 6y$;

$z'_y = 24y^2 - 6x$. Решая систему $\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases}$, найдем две точки: $M_1(0;0)$ и $M_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Обе

точки являются критическими, т.к. функция z определена на своей плоскости $ХОУ$. Исследуем критические точки M_1 и M_2 по знаку определителя Δ , состав-

ленного из частных производных второго порядка: $z''_{xx} = A = 6x$; $z''_{yy} = C = 48y$; $z''_{xy} = B = -6$. Для точки $M_1(0;0)$ получим $A = 0$, $B = -6$, $C = 0$. $\Delta = AC - B^2 = -36 < 0$. Следовательно, согласно достаточному условию в точке M_1 нет экстремума.

Для точки $M_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$ получим $A = 6$, $B = -6$, $C = 24$, $\Delta = AC - B^2 = 108 > 0$ Согласно

достаточному условию M_2 есть точка минимума $z_{\min} = z\left(1; \frac{1}{2}\right) = 4$

Задача 4

Задача 4. Даны: функция $z = z(x, y)$, точка A и вектор \bar{a} . Найти:

1) \overline{gradz} в точке A ;

2) производную в точке A по направлению вектора \bar{a} .

4.1. $z = \ln(5x + 3y)$; $A(2;2)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

4.2. $z = \arctg \frac{y^2}{x}$; $A(2;1)$; $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

4.3. $z = \frac{xy}{x - y}$; $A(2;1)$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

4.4. $z = 2x^4 + 8x^2y^3$; $A(2;-1)$; $\bar{a} = -3\bar{i} + 4\bar{j}$.

4.5. $z = \ln(2x^2 + y^3)$; $A(3;-1)$; $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j}$.

4.6. $z = \arctg \frac{x}{y^2}$; $A(3;1)$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

4.7. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2;-2)$; $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j}$.

4.8. $z = \ln(3x^2 + 5y^3)$; $A(2;3)$; $\bar{a} = -4\bar{i} + 3\bar{j}$.

4.9. $z = 2x^3y + 3x^2y^2$; $A(1;-2)$; $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$.

4.10. $z = \ln(5x + 3y)$; $A(2;2)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

4.11. $z = 3x^2y^2 + 5xy^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

4.12. $z = 3x^2 + 2x^2y^3$; $A(-1;2)$; $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

- 4.13. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; $A(1;3)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.
- 4.14. $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$; $A(1;2)$; $\bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$.
- 4.15. $z = \text{arctg}(xy^2)$; $A(2;3)$; $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.
- 4.16. $z = 5x^2 + 6xy$; $A(2;1)$; $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$.
- 4.17. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.
- 4.18. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$.
- 4.19. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2;1)$; $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.
- 4.20. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.
- 4.21. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$.
- 4.22. $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$; $A(1;-2)$; $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$.
- 4.23. $z = \ln(3x^2 + 2xy^2)$; $A(1;2)$; $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$.
- 4.24. $z = \text{arctg}(xy)$; $A(2;3)$; $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.
- 4.25. $z = \frac{3x}{y^2}$; $A(3;4)$; $\bar{a} = -3\bar{i} - 4\bar{j}$.
- 4.26. $z = 5x^2y + 3xy^2$; $A(1;1)$; $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$.
- 4.27. $z = \ln(2x + 3y)$; $A(2;2)$; $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.
- 4.28. $z = x^3y + xy^2$; $A(1;3)$; $\bar{a} = -5\bar{i} + 12\bar{j}$.
- 4.29. $z = \text{arctg} \frac{y}{x}$; $A(-1;2)$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

Производная функции $z = f(x, y)$ *в точке* $M(x, y)$ *в направлении вектора* $\bar{l} = \overline{MM_1}$ *называется* $\lim_{|MM_1| \rightarrow 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|MM_1|} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\rho} = \frac{\partial z}{\partial l}$, *где* $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$, где α, β - углы, образованные вектором \bar{l} с осями Ox и Oy . Производная по направлению $\frac{\partial z}{\partial l}$ дает скорость изменения функции z в направлении вектора \bar{l} .

Градиентом функции $z = f(x, y)$ *в точке* $M(x, y)$ *называется вектор, выходящий из точки* M *и имеющий своими координатами частные производные функции* z :

$$\overline{\text{grad}z} = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j};$$

$$\overline{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Градиент функции и производная в направлении вектора \bar{l} связаны формулой $\frac{\partial z}{\partial l} = n_{\bar{l}} \overline{gradz}$. Градиент указывает направление наибоыстрейшего роста функции в данной точке.

Пример. Вычислить производную функции $z = 2x^2 + xy$ в точке $M(-1;2)$ в направлении вектора $\bar{l} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ и градиент.

Решение. Найдем значение частных производных в точке M .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (4x + y)|_{(x=-1; y=2)} = -2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x|_{(x=-1; y=2)} = -1.$$

Вычислим направляющие косинусы $\bar{l} = x\bar{i} + y\bar{j}$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}; \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{5}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x_{(M)}} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y_{(M)}} \cdot \cos \beta;$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = -2 \cdot \frac{3}{5} + (-1) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{4}{5} = -2;$$

$$\overline{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x_{(M)}} \cdot \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y_{(M)}} \cdot \bar{j};$$

$$\overline{gradz} = -2\bar{i} - \bar{j}.$$

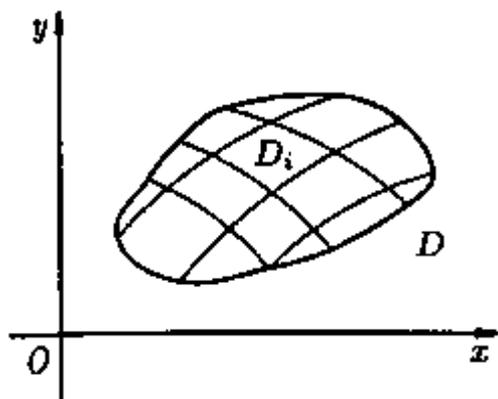
II. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Основные понятия и определения

Обобщением определенного интеграла на случай функций двух переменных является так называемый двойной интеграл.

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана непрерывная функция $z=f(x;y)$. Разобьем область D на n «элементарных областей» D_i ($i = \overline{1, n}$),



площади которых обозначим через ΔS_i , а диаметры (наибольшее расстояние между точками области) - через d_i (см. рис. 3).

В каждой области D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i; y_i)$, умножим значение $f(x_i; y_i)$ функции в этой точке на ΔS_i и составим сумму всех таких произведений:

$$f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \dots + f(x_n; y_n)\Delta S_n =$$

Рис. 3.

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i)\Delta S_i \quad (1)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x;y)$ в области D .

Рассмотрим предел интегральной суммы (1), когда n стремится к бесконечности таким образом, что $\max d_i \rightarrow 0$. Если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x;y)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(x; y) dx dy \quad \text{или} \quad \iint_D f(x; y) dS$$

Таким образом, *двойной интеграл* определяется равенством

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \cdot \Delta S_i \quad (2)$$

В этом случае функция $f(x; y)$ называется **интегрируемой в области D** ; D - **область интегрирования**; x и y - **переменные интегрирования**; $dx dy$ (или dS) - **элемент площади**.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Покажем, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x; y) dx dy$ где функция

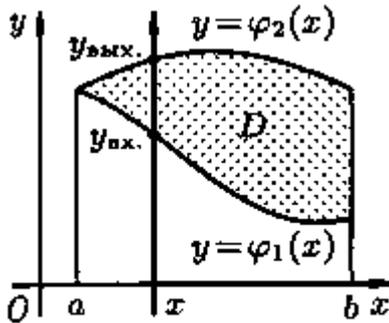


Рис. 7.

$f(x; y) \geq 0$ непрерывна в области D . Тогда, как это было показано в п. 2, двойной интеграл выражает объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x; y)$. Найдем этот объем, используя метод параллельных сечений. Ранее было показано, что

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad 3$$

где $S(x)$ - площадь сечения плоскостью, перпендикулярной оси Ox , а $x=a, x=b$ - уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

Положим сначала, что область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную прямыми $x=a$ и $x=b$ и кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$, причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и таковы, что $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ для всех $x \in [a; b]$ (см. рис. 7). Такая область называется **правильной в направлении оси Oy** : любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает границу области не более чем в двух точках.

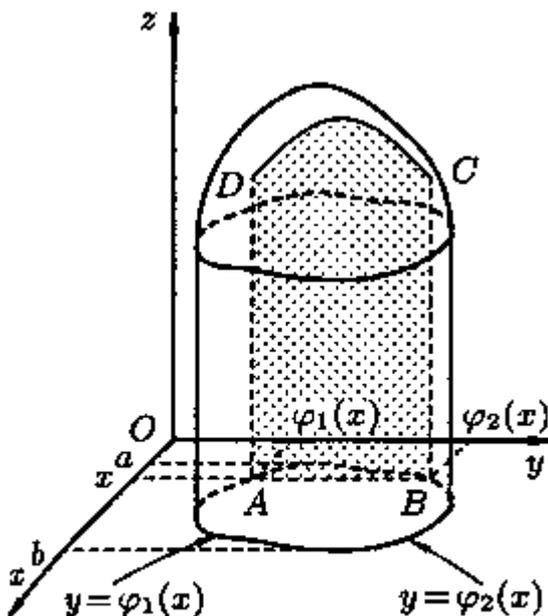


Рис. 8.

Построим сечение цилиндрического тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox : $x = \text{const}$, где $x \in [a; b]$.

В сечении получим криволинейную трапецию $ABCD$, ограниченную линиями

$z=f(x;y)$, где $x=\text{const}$, $z=0$, $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ (см. рис. 8). Площадь $S(x)$ этой трапеции находим с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y) dy. \quad 4$$

Теперь, согласно методу параллельных сечений, искомый объем цилиндрического тела может быть найден так:

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y) dy \right) dx. \quad 5$$

С другой стороны, в п. 2 было доказано, что объем цилиндрического тела определяется как двойной интеграл от функции $f(x;y) \geq 0$ по области D . Следовательно,

$$V = \iint_D f(x;y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y) dy \right) dx. \quad 6$$

Это равенство обычно записывается в виде

$$\iint_D f(x;y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y) dy \quad (7)$$

Формула (7) представляет собой способ вычисления двойного интеграла в декартовых координатах. Правую часть формулы (7) называют *двукратным* (или *повторным*) интегралом от функции $f(x;y)$ по области D .

При этом $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x;y) dy$ называется *внутренним* интегралом.

Для вычисления двукратного интеграла сначала берем внутренний интеграл, считая x постоянным, затем берем внешний интеграл, т. е. результат первого интегрирования интегрируем по x в пределах от a до b .

Если же область D ограничена прямыми $y=c$ и $y=d$ ($c < d$), кривыми $x=\Psi_1(y)$ и $x=\Psi_2(y)$ причём $\Psi_1(y) \leq \Psi_2(y)$ для всех $y \in [c; d]$, т. е. область D - правильная в направлении оси Oy , то, рассекая тело плоскостью $y=\text{const}$, аналогично получим:

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \cdot \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x; y) dx \quad (8)$$

Здесь, при вычислении внутреннего интеграла, считаем y постоянным.

Замечания.

1. Формулы (7) и (8) справедливы и в случае, когда $f(x; y) < 0$, $(x; y) \in D$.
2. Если область D правильная в обоих направлениях, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (7.7), так и по формуле (7.8).
3. Если область D не является правильной ни «по x », ни «по y », то для сведения двойного интеграла к повторным ее следует разбить на части, правильные в направлении оси Ox или оси Oy .
4. Полезно помнить, что внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны, а внутренние, как правило, переменные.

Пример 1. Вычислить $\iint_D (x+2y) dx dy$ где область D ограничена линиями $y=x^2$, $y=0$, $x+y-2=0$.

Решение: На рисунке 9 изображена область интегрирования D . Она правильная в направлении оси Ox . Для вычисления данного двойного интеграла воспользуемся формулой (7.8):

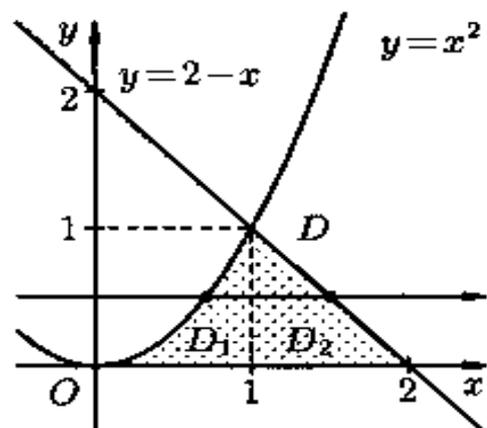


Рис. 9.

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x + 2y) dx = \\
&= \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} = \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \\
&= \left(\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7 \cdot y^2}{2 \cdot 2} - 2 \cdot \frac{y^3}{3} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{y^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1,45.
\end{aligned}$$

Отметим, что для вычисления данного двойного интеграла можно воспользоваться формулой (7). Но для этого область D следует разбить на две области: D_1 и D_2 . Получаем:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y) dx dy &= \iint_{D_1} (x + 2y) dx dy + \iint_{D_2} (x + 2y) dx dy = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x + 2y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (x + 2y) dy = \\
&= \int_0^1 dx \cdot (xy + y^2) \Big|_0^{x^2} + \int_1^2 dx \cdot (xy + y^2) \Big|_0^{2-x} = \\
&= \int_0^1 (x^3 + x^4) dx + \int_1^2 (2x - x^2 + (2-x)^2) dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) + \left(4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{20} + 3 - 2 = 1,45.
\end{aligned}$$

2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ в произвольной области U определяется в виде:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_{[a, b] \times [c, d] \times [p, q]} g(x, y, z) dV.$$

Пример. Вычислим интеграл $\iiint_V xyz dx dy dz$ где V – треугольная пирамида с вершинами в точках $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Ее проекцией на плоскость Oxy является треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Снизу область ограничена плоскостью $z = 0$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 1$. Перейдем к трехкратному интегралу:

$$\iiint_V xyz dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz dz$$

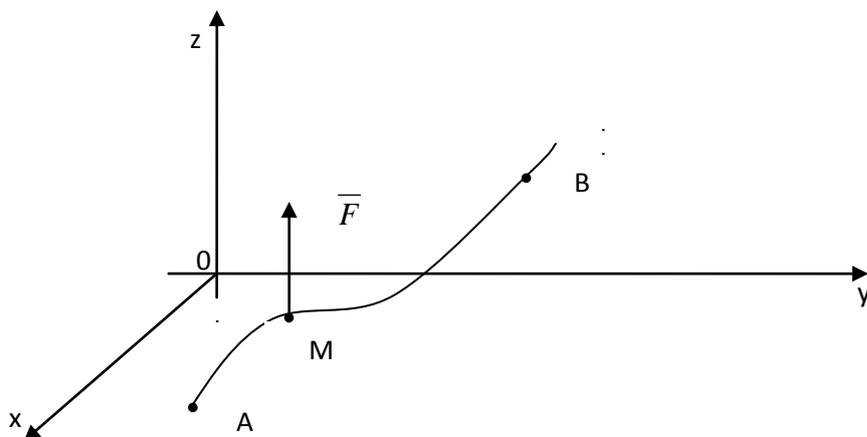
Множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно вынести за знак соответствующего интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy \int_0^{1-x-y} z dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \left[(1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x) \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x} = \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5) dx = \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^4 - \frac{4}{5} x^5 + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

К понятию криволинейного интеграла 2-го рода приводит задача вычисления работы переменной силы по перемещению материальной точки вдоль данной кривой.

Пусть вдоль некоторой пространственной кривой L движется материальная точка $M(x,y,z)$ под действием переменной силы $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$.



Проекции силы являются функциями точки $M(x,y,z)$.

$$F_x = P(x, y, z), \quad F_y = Q(x, y, z), \quad F_z = R(x, y, z)$$

Требуется найти работу силы по перемещению т.М из А в В.

Если АВ-прямая и сила const., то работа

:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos(\vec{F} \wedge \vec{S}) = F_x S_x + F_y S_y + F_z S_z \quad (\vec{S} = \overline{AB}).$$

Разобьем кривую на элементарные участки и вычислим работу на каждом таком участке.

Пусть $\overline{dS} = \overline{dS}(dx, dy, dz)$ -вектор, изображающий бесконечно малый участок кривой. Точка $M(x, y, z)$

Индивидуальные задания 2.

Задача 1

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$1. \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x; y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x; y) dy$$

$$2. \int_2^{41} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x; y) dy$$

$$3. \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x; y) dx$$

$$4. \int_1^2 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x; y) dy$$

$$5. \int_2^4 dy \int_{y/2}^y f(x; y) dx$$

$$6. \int_0^3 dx \int_{x^2}^{3+2x} f(x; y) dy$$

$$7. \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{y/2} f(x; y) dx$$

$$8. \int_1^2 dx \int_{\frac{2}{x}}^{2x} f(x; y) dy$$

$$9. \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x; y) dy$$

$$10. \int_0^1 dx \int_{=1+\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x; y) dy$$

$$11. \int_0^2 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}=2}^0 f(x; y) dy$$

$$12. \int_{-\sqrt{2}}^0 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{1-y^2} f(x; y) dx$$

$$13. \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x; y) dy$$

$$14. \int_4^1 dx \int_x^{8-x} f(x; y) dy$$

$$16. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f(x; y) dy$$

$$17. \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x; y) dy$$

$$18. \int_0^a dx \int_{-\sqrt{2a-x^2}}^{\sqrt{2a-x^2}} f(x; y) dy$$

$$19. \int_0^a dx \int_{=\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x; y) dy$$

$$20. \int_0^a dx \int_{2x-1}^{x+1/2} f(x; y) dy$$

$$21. \int_0^2 dx \int_{=+\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$$

$$22. \int_0^{8/5} dx \int_{2x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$$

$$23. \int_0^{8/5} dx \int_{2x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x; y) dy$$

$$24. \int_0^1 dy \int_{2y-1}^{y+1/2} f(x; y) dx$$

$$25. \int_{-4}^0 dy \int_{-\sqrt{-x}}^{-x} f(x; y) dx$$

$$26. \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x; y) dy$$

$$27. \int_{-3}^0 dx \int_x^{3+x} f(x; y) dy$$

$$28. \int_0^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{4}} f(x; y) dy$$

$$15 \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x; y) dx$$

$$29. \int_0^3 dy \int_{-y}^{9/2} f(x; y) dx$$

Решение типового примера.

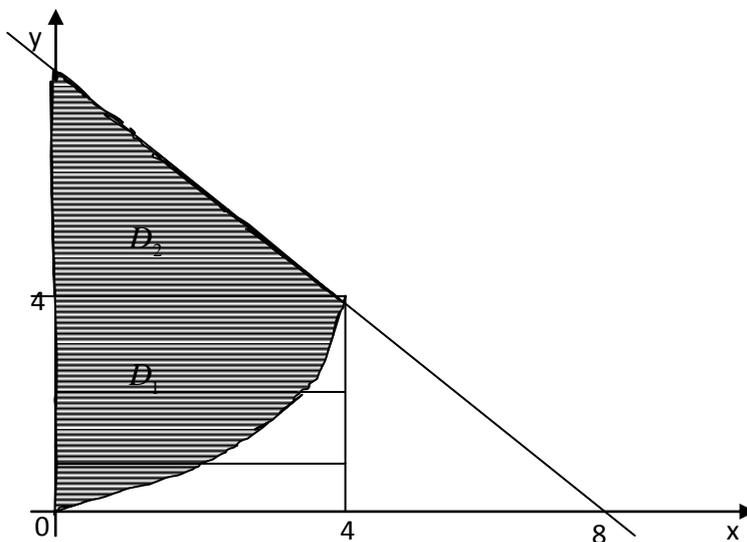
Пример. Изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл

$$\int_0^4 \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y) dx dy .$$

Решение. Так как переменные пределы зависят от x , то внутренний интеграл берется по переменной y , можно записать:

$$\int_0^4 \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y) dy .$$

Построим область интегрирования. $x = 0$; $x = 4$; $y = 2\sqrt{x}$; $y = 8 - x$;-уравнения линий, ограничивающих эту область. Таким образом область ограничена слева осью OY , справа прямой $x = 4$; снизу параболой $y = 2\sqrt{x}$, сверху прямой $y = 8 - x$



Изменить порядок интегрирования- это значит в нашем случае внутренний интеграл взять по x , а внешний по y , т.е. интеграл записать в виде: $\int dy \int f(x, y) dx$.

Чтобы найти пределы интегрирования внутреннего интеграла по x , нужно в области интегрирования провести прямую параллельно оси OX , отметить точку входа и выхода. Тогда X точки входа, полученное из уравнения линии, на

которой лежит точка, будет нижним пределом интегрирования, а X точки выхода-верхним.

В нашем случае точка выхода может лежать либо на прямой $y = 8 - x$, либо на параболе $y = 2\sqrt{x}$. В этом случае область D разбивают на две области D_1

и D_2 . И интеграл находят, как сумму интегралов:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Область D_1 ограничена линиями: $x = 0$; $y = 4$; $y = 2\sqrt{x}$

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^4 dy \int_0^{\left(\frac{y}{2}\right)^2} f(x, y) dx$$

Область D_2 ограничена линиями $x = 0$; $y = 4$; $y = 8 - x$

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_4^8 dy \int_0^{8-y} f(x, y) dx$$

$$\text{Итак: } \int_0^4 \int_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x, y) dx dy = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{y^2}{4}} f(x, y) dx + \int_4^8 dy \int_0^{8-y} f(x, y) dx$$

Задача 2.

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

1. $x^2 2z; x = 2y; y = 2x; x = 2\sqrt{2}; z = 0$ ($V=12$)
2. $y^2 = x+1; y^2 = 1-x; z = 3-x-y; z = 0$ ($V=8$)
3. $z = 0; x = 0; z = y^2 + 1; x + y = 1$ ($V = \frac{7}{12}$)
4. $z = 0; z = (x-1)^2; y^2 = x$ ($V = \frac{32}{105}$)
5. $z = 0; z = x^2; 2x - y = 0; x + y = 9$ ($V = \frac{81}{4}$)
6. $z = 4\sqrt{y}; x + y = 4; x = 0; z = 0$ ($V = 34\frac{2}{15}$)
7. $z = 0; y = 0; z = x^2 + 3y^2; x = y = 1$ ($V = \frac{1}{3}$)
8. $z = 0; z = \sqrt{x-4}; y = x^2$ ($V = \frac{\pi}{4}$)
9. $z = 2x; x + y = 3; x = \sqrt{\frac{y}{2}}; z = 0$ ($V = \frac{4}{3}$)
10. $z = \frac{1}{4}y^2; 2x - y = 0; x + y = 9; z = 0$ ($V = \frac{1539}{16}$)
11. $y = 1 - z^2; y = x; y = -x$ ($V = \frac{16}{15}$)
12. $z = y^2; z = 0; x = 0; x + y = 2$ ($V = \frac{4}{3}$)
13. $z = y; z = 0; x = 0; x = 4; y = \sqrt{25 - x^2}$ ($V = 39\frac{1}{3}$)
14. $z = 0; z = 2 - x; y = 2\sqrt{x}; y = \frac{1}{4}x^2$ ($V = \frac{32\sqrt{2-5}}{15}$)
15. $z = 0; y = x; y = 5 - x; y = 0; y = \sqrt{4 - z}$ ($V = \frac{56}{3}$)
16. $4z = x^2; y = 0; y + z = 4$ ($V = \frac{512}{15}$)
17. $y = 4 - x^2; y + z = 4; z = 0; y = 0$ ($V = \frac{128}{5}$)
18. $z = 4 - y^2; z = 0; y = 2 - x^2$ ($V = \frac{1024}{35}$)
19. $z = 1 + y^2; x + y = 2; z = 0; y = 0; y = 2 + 2x$ ($V=5$)
20. $z = x^2 + y^2; z = 0; y = 2x; y = 6 - x; y = 1$ ($V=136$)
21. $y = 0; z = 0; x + y + z = 4; 2x + z = 4$ ($V = \frac{8}{3}$)

$$22. z^2 = 4y; x = y; x + y = 2$$

$$(V = \frac{32}{15})$$

$$23. y = 0; z = y; z = 4 - x^2$$

$$(V = \frac{256}{15})$$

$$24. x^2 = y; z^2 = 4 - y; x = 0; x + y = 4$$

$$(V = \sqrt{2} \frac{32}{3})$$

$$25. x = 2y^2; x + 2y + z = 4; y = 0; z = 0$$

$$(V=3,4)$$

$$26. y = 1 - x^2; y = -\sqrt{1 - x^2}; z = 0; z = 6$$

$$(V = 3\pi + 8)$$

$$27. x^2 = 4y; z + y = 4; y + 2z = 4$$

$$(V = \frac{256}{15})$$

$$28. y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4; z = 0; z = 3$$

$$(V=24)$$

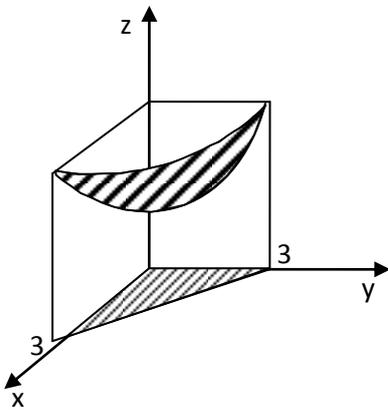
$$29. y = x; x + y = 2; z^2 = 9x$$

$$(V = \frac{16}{5})$$

Решение типового примера.

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2 + 1$ и плоскостью $x + y = 3$ и координатными плоскостями.

Решение: Сделаем чертеж.



Найдем объем с помощью тройного интеграла:

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{x^2+y^2+1} dz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy z \Big|_0^{x^2+y^2+1} = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (x^2 + y^2 + 1) dy = 18 \text{ (ед.куб.)}$$

Задача 3.

В каждой точке линии L на материальную точку единичной массы действует

сила $\vec{F} = \{P(x; y); Q(x; y)\}$.

Вычислите работу, совершаемую этой силой при движении материальной точки по линии L из точки A в точку B.

1. $\vec{F} = \{xy; x + y\}$; L: $y = x$; A(0;0); B(1;1)
2. $\vec{F} = \{2xy; x^2\}$; L: прямая; A(1;0); B(0;3)
3. $\vec{F} = \{xy; x + y\}$; L: $y = x^2$; A(0;0); B(1;1)
4. $\vec{F} = \{x; \frac{1}{y^2}\}$; L: $xy = 1$; A(1;1); B(4;1/4)
5. $\vec{F} = \{\sin^2 x; y^2\}$; L: $y = \cos x$; A(0;1); B(π ;-1)
6. $\vec{F} = \{x^2 + y; x + y^2\}$; L: прямая; A(-1;1); B(0;2)
7. $\vec{F} = \{-y; x\}$; L: $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
8. $\vec{F} = \{y; x\}$; L- прямая соединяющая точки A(a;0); B($\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}$)
9. $\vec{F} = \{-y^2; xy\}$; L: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
10. $\vec{F} = \{x^2 y; xy^2\}$; L- прямая проходящая через точку A(0;0); u B(2;2)
11. $\vec{F} = \{3x^2 + 4xy; 2x^2 - 3y^2\}$; L- прямая соединяющая точки A(0;0); B(1;2)
12. $\vec{F} = \{xy; x - y\}$; L: $y = x$; A(0;0); B(3;3)
13. $\vec{F} = \{2xy; x^2\}$; L: $y = x$; A(1;1); B(2;2)
14. $\vec{F} = \{2x + y; 2y\}$; L: $\begin{cases} x = 0,5 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad A(\frac{1}{2}; 0); B(0;1)$
15. $\vec{F} = \{x + y; 2x\}$; L: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad A(1;0); B(-1;0)$
16. $\vec{F} = \{x; 2y + x\}$; L: $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad A(3;0); B(-3;0)$
17. $\vec{F} = \{x; -y\}$; L: $y = \frac{x^2}{2}$; A(-2;2); B($\sqrt{2}$;1)
18. $\vec{F} = \{x^2 + y; y^2 + x\}$; L-ломаная $x = 5; y = 1$; A(2;1); B(5;3)
19. $\vec{F} = \left\{ \frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}$; L: прямая; A(1;2); B(3;6)
20. $\vec{F} = \{2xy; x^2\}$; L: $y = x^2$; A(0;0); B(1;1)

21. $\bar{F} = \{xy; y - x\}$ L: $y^2 = x$; A(0;0); B(2;2)
22. $\bar{F} = \{xy; x + y\}$ L-ломаная $x = 1; y = 0; A(0;0); B(1;1)$
23. $\bar{F} = \{xy; x + y\}$ L-ломаная $x = 0; y = 1; A(0;0); B(1;1)$
24. $\bar{F} = \{x^2 - y; y^2 - x\}$ L-окружность $x = 5 \cos t; y = 5 \sin t$ A(5;0); B(0;5)
25. $\bar{F} = \{x^2 - 2xy; y^2 - 2xy\}$ L-парабола $y = x^2$; A(0;0); B(1;1)

Решение типового примера.

Пример. В каждой точке линии L на материальную точку действует сила $\bar{F} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$. Вычислить работу совершаемую этой силой при движении материальной точки по линии L из точки A в точку B, если $P(x, y) = 2xy$; $Q(x, y) = x$

L- прямая соединяющая точку A(1,0) с точкой B(0,2).

Решение. Из механического смысла криволинейного интеграла имеем

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ или } A = \int_L 2xydx + xdy$$

Составим уравнение прямой L как уравнение прямой, проходящей через две точки A и B по формуле :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

$$\frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 1}{0 - 1}; \quad y = -2(x - 1).$$

Получили уравнение линии L: $y = -2(x - 1)$.

Тогда $dy = -2dx$ и работа силы будет:

$$A = \int_1^0 2x(-2(x-1))dx + x(-2)dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x + 2x)dx = \int_0^1 (4x^2 - 2x)dx = \left(\frac{4}{3}x^3 - x^2\right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Задача 4.

Найти центр тяжести плоской пластины ограниченной указанными линиями.

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. $y = 3x^2$; $3x + 3y = 2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 2 + y$ |
| 2. $x - 2y^2 = 0$; $x + y = 1$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 + x$ |
| 3. $x + y = 1$; $x - 2y + 2 = 0$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 - y$ |
| 4. $y - x^2 = 0$; $x + y = 2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 2 + y$ |
| 5. $y = 4 - x^2$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x^2$ |
| 6. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; $x = 0$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = y$ |
| 7. $x + y = 3$; $3y = 2x^2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x + y$ |
| 8. $y = x^2 + 1$; $y = 2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 - x$ |

Найти моменты инерции I_x и I_y для плоской пластины, ограниченной указанными линиями.

- | | |
|--|--------------------------|
| 9. $x + y + 1 = 0$; $x - 2y + 2 = 0$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 4 + y$ |
| 10. $x + \sqrt{2y} = 1$; $x = 0$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x$ |
| 11. $x - 3y^2 = 0$; $3x + 3y = 2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 2 + x$ |
| 12. $y = x + 1$; $x + 2y = 2$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 - y$ |
| 13. $\sqrt{2x} + \sqrt{y} = 1$; $x = 0$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 2x$ |
| 14. $y + x^2 = 0$; $y + 1 = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x^2$ |
| 15. $y = 1 + x$; $2x + y + 2 = 0$; $x = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 + x$ |
| 16. $x - 2y^2 = 0$; $x + y = 1$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 + x$ |
| 17. $x - y = 1$; $x + 2y + 2 = 0$; $y = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 - y$ |
| 18. $x + y = 3$; $3y = 2x^2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x + y$ |
| 19. $3x - y^2 = 0$; $x + y = 6$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = y^2$ |
| 20. $y = x^2$; $x + y = 2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 2 + x$ |
| 21. $y = 3x^2$; $3x + 3y = 2$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 1 + y$ |

Найти массу тела, ограниченного указанными поверхностями.

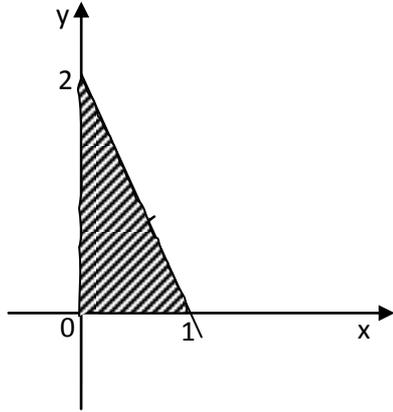
- | | |
|---|------------------------------|
| 22. $z = 0$; $x^2 + y^2 = 1$; $z = 4$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = 4 - z$ |
| 23. $z = x^2 + y^2$; $z = 1$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x^2 + y^2$ |
| 24. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x$ |
| 25. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ | ПЛОТНОСТЬ $\rho = x^2$ |

Решение типового примера.

Пример: Найти центр тяжести плоской пластины, ограниченной линиями

$$x = 0, \quad y = 0, \quad 2x + y = 2, \quad \text{плотность пластины } \rho = xy$$

Решение: Найдем массу пластинки:



$$M = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} xy dy = \int_0^1 dx \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{2-2x} = \int_0^1 2x(1-x)^2 dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) dx = x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Вычислим интеграл

$$\iint_D x\rho(x, y) dx dy = \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 2x^2(1-x)^2 dx = 2 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} - x^4 + \frac{2x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

$$\text{Тогда } x_c = \frac{\iint_D x\rho dx dy}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Вычислим интеграл $\iint_D y\rho(x, y) dx dy = \iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} xy^2 dy =$

$$= \int_0^1 dx \frac{xy^3}{3} \Big|_0^{2-2x} = \frac{8}{3} \int_0^1 x(1-x)^3 dx = \frac{8}{3} \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4) dx = \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \right.$$

$$\left. + 2x^4 - \frac{8}{15}x^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2 - \frac{8}{15} = \frac{2}{15};$$

$$\text{Тогда } y_c = \frac{\iint_D y\rho(x, y) dx dy}{M} = \frac{2/15}{1/6} = \frac{4}{5}$$

Центр тяжести имеет координаты $(\frac{2}{5}; \frac{4}{5})$.

Задача 5.

Применяя формулу Грина, вычислить интегралы.

1. $\oint_C 2xydx + 3x^2 dy$, где C -контур треугольника $x = 0; y = 0; x + y + 1 = 0$
2. $\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, где C -контур ΔZMN , если $Z(1;1), M(2;2), N(1;3)$ пробегаемый против хода часовой стрелки.
3. $\oint_C -x^2 ydx + xy^2 dy$, где C -окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегая против хода часовой стрелки.
4. $\oint_C y^2 dx + (x + y)^2 dy$, где C -контур ΔABC с вершинами $A(a;0), B(a;a), C(0;a)$
5. $\oint_C (x + y)dx - 2xydy$, где C -треугольник со сторонами $x = 0, y = 0, x + y = a$
6. $\oint_C \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$, где C -контур треугольника с вершинами $A(1;1), B(2;1), C(2;2)$
7. $\oint_C ydx + (x + y)dy$, где C -контур фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 4$
8. $\oint_C 2xdx + (x + 2y)dy$, вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1;0), B(0;2), C(2;0)$
9. $\oint_C y \cos x dx + \cos x dy$, вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1;0), B(0;2), C(2;0)$
10. $\oint_C (x^2 - y)dx + (x^2 + y^2)dy$, где C -эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
11. $\oint_C (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, где C -контур фигуры ограниченной линиями $xy = 1, y = x, x = 2$, пробегаемой против хода часовой стрелки.
12. $\oint_C 2x(y - 1)dx - x^2 dy$ по контуру фигуры ограниченной линиями $y = x^2, y = 9$
13. $\oint_C (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ по контуру круга $x^2 + y^2 = R^2$
14. $\oint_C (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$ по контуру треугольника ограниченного прямыми $y = x, x + y = 1, y = 0$
15. $\oint_C 2xydx + 2x^2 dy$, где C -контур фигуры, ограниченной линиями $x = y^2, y = 0, x = 3$
16. $\oint_C y^2 dx + (x - y)dy$, где C -контур фигуры, ограниченной линиями $x = y^2, y = x,$

17. $\oint_C xdy - 2ydx$, где C -контур треугольника с вершинами $A(1;1)$, $B(2;-1)$, $C(0;2)$

18. $\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, где C -контур фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, y = 4$$

19. $\oint_C (x^2 + y^3)dx + 2ydy$, где C -окружность $x^2 + y^2 = 4$

20. $\oint_C (x^2 - y^2)dx + x^2 dy$, где C -контур треугольника ограниченного линиями

$$y = x, y = 2x, x = 4$$

21. $\oint_C y^2 dx + (x + y^2)dy$, где C -контур треугольника ограниченного линиями

$$y = 2 - x^2, x - y + 1 = 0$$

22. $\oint_C ydx + (x^2 + y)dy$ где C -контур треугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C(0;2)$

23. $\oint_C (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$, по контуру фигуры ограниченной линиями

$$y = x^3, y = 0, y = 2$$

24. $\oint_C 2x^2 dy - (x + y)dx$, где C -контур треугольника с вершинами

$$A(1;1), B(2;2), C(0;3)$$

25. $\oint_C 2x dx + (x + 2y)dy$ вдоль периметра окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$

26. $\oint_C 2x(y - 1)dx - x^2 dy$, где C -контур треугольника ограниченного линиями

$$y = x, x + y = 3, y = -2$$

27. $\oint_C 2xy dx + (x^2 - y)dy$, где C -контур фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, x + y = 1, y = 0$$

Решение типового примера.

Пример. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл $\oint_z (1 - x^2)y dx + x(1 + y^2)dy$ где z - есть окружность $x^2 + y^2 = 4$

Решение: $P(x, y) = (1 - x^2)y$

$$Q(x, y) = x(1 + y^2)$$

Находим $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2$

Вычислим: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 + y^2 - (1 - x^2) = x^2 + y^2$

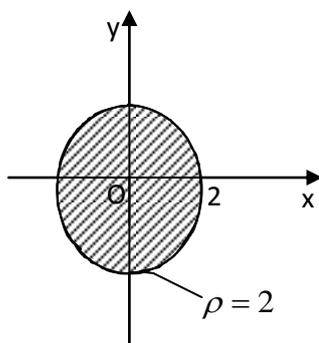
По формуле Грина имеем:

$$\oint_z (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy = \iint_D (x+y^2)dxdy$$

$x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$ -для вычисления нашего интеграла переходим к полярным координатам.

Уравнение окружности в полярных координатах имеет вид:

$$\rho^2 = 4; \quad \rho = 2$$



Тогда:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2)dxdy &= \iint_D \rho^2 \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 4\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8\pi. \end{aligned}$$

III. Элементы теории поля

Пусть на заданной поверхности S в пространстве определена векторная функция $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Потоком вектора \vec{F} через поверхность S называется поверхностный интеграл $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS$, где \vec{n} - единичный вектор нормали к поверхности S , при этом подразумевается, что \vec{n} - «внешняя» нормаль, иначе интеграл берется со знаком минус.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz - \text{ для замкнутой поверхности, где}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} - \text{ дивергенция вектора } \vec{F}.$$

Основной характеристикой скалярного поля $U(x, y, z)$ является градиент, это вектор, который по численному значению и по направлению характеризует наибольшую скорость возрастания величины U . Обозначается градиент скалярного поля $\operatorname{grad} U$

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}.$$

Основными характеристиками векторного поля

$\vec{a} = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ являются дивергенция и ротор (вихрь)

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротор векторного поля \vec{a} обозначается $\operatorname{rot} \vec{a}$ и вычисляется:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} \text{ или}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Индивидуальные задания 3.

Задача 1

Вычислить поток векторного поля через сторону треугольника, вырезаемого из плоскости P координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью z острый угол.

1. $\vec{F} = (2z - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + 3(x + z)\vec{k}$; $(P): x + y + 2z - 2 = 0$
2. $\vec{F} = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + 3(y + z)\vec{k}$; $(P): x - 2y - 2z - 2 = 0$
3. $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$; $(P): 2x + y + z - 2 = 0$
4. $\vec{F} = (2x - 2y)\vec{i} + (y + x)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}$; $(P): x - y + z - 2 = 0$
5. $\vec{F} = (x - 2z)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (2x + y + 2z)\vec{k}$; $(P): -x + 2y + 2z - 2 = 0$
6. $\vec{F} = (2z + x)\vec{i} + (x - 3z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$; $(P): -3x + 2y + 4z - 6 = 0$
7. $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2x + 2z)\vec{k}$; $(P): 2x + 3y + z - 6 = 0$
8. $\vec{F} = (x + y + z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y - 7z)\vec{k}$; $(P): 2x + 3y + z - 6 = 0$
9. $\vec{F} = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + 2x)\vec{k}$; $(P): -2x + y + z - 4 = 0$
10. $\vec{F} = (2z - x)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + 3z\vec{k}$; $(P): -x + 4y + z - 4 = 0$

11. $\vec{F} = z\vec{i} + yx\vec{j} + \frac{1}{\alpha}z^2\vec{k}$; $(P): x + 4y + z - 4 = 0$
12. $\vec{F} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; $(P): z = x + y + 2$
13. $\vec{F} = 2x\vec{i} + 6y\vec{j} - 4z\vec{k}$; $(P): z - 2x + y = 4$
14. $\vec{F} = x\vec{i} + 3y\vec{j} - 3z\vec{k}$; $(P): x - 2y + z = 2$
15. $\vec{F} = \frac{1}{\alpha}x^2\vec{i} + \frac{1}{\alpha}y^2\vec{j} + \frac{1}{\alpha}z^2\vec{k}$; $(P): x - y + 2z = 4$
16. $\vec{F} = 2y\vec{i} + 3z\vec{j} + x\vec{k}$; $(P): x + y + z = 3$
17. $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}$; $(P): 2x - y + 2z = 2$
18. $\vec{F} = (y - 1)\vec{i} + 2x\vec{j} + z\vec{k}$; $(P): x - y + z = 1$
19. $\vec{F} = (1 - x)\vec{i} + 2z\vec{j} + y\vec{k}$; $(P): x + 2y + 2z = 2$
20. $\vec{F} = (z + 1)\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$; $(P): x + 3y - z = 1$
21. $\vec{F} = (1 - x)\vec{i} + 4\vec{j} - z\vec{k}$; $(P): x + 3y - 3z = 6$
22. $\vec{F} = (2z - x)\vec{i} + 4\vec{j} - 2z\vec{k}$; $(P): x + 2y + z = 2$
23. $\vec{F} = (2z - x)\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$; $(P): x - 2y - z = 2$
24. $\vec{F} = (y - 1)\vec{i} + 2x\vec{j} + z\vec{k}$; $(P): x - y + 2z = 2$
25. $\vec{F} = (2x + z)\vec{i} - y\vec{j} + (z - 3)\vec{k}$; $(P): x + 2y - 2z = 4$

Решение типового примера.

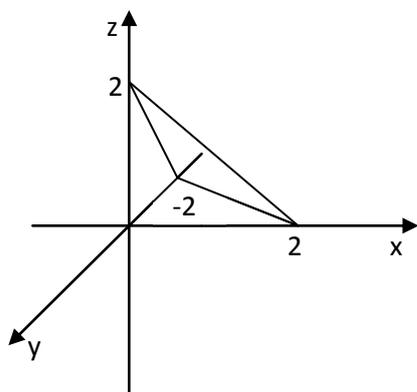
Пример. Вычислить поток векторного поля \vec{F} через сторону треугольника S , вырезаемого из плоскости P координатными плоскостями, в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью OZ острый угол, если $\vec{F} = (2x - z)\vec{i} + (y - x)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}$, уравнение плоскости $P : x - y + z - 2 = 0$

Решение: по формуле Остроградского-Гаусса находим

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2 + 1 + 2 = 5.$$

Тогда
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V 5 \, dx \, dy \, dz \quad (\text{см. рис.})$$

$$\begin{aligned} \iiint_V 5 \, dx \, dy \, dz &= 5 \int_0^2 dx \int_{x-2}^0 dy \int_0^{2-x+y} dz = 5 \int_0^2 dx \int_{x-2}^0 (2 - x + y) dy = \\ &= 5 \int_0^2 dx \left(2y - xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x-2}^0 = 5 \int_0^2 \left(-2x + 4 + x^2 - 2x - \frac{(x-2)^2}{2} \right) dx = \end{aligned}$$



$$= 5 \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4 - \frac{(x-2)^2}{2} \right) dx = 5 \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - \frac{(x-2)^3}{6} \right) \Big|_0^2 = 5 \left(\frac{8}{3} - 8 + 8 - \frac{8}{6} \right) = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

Задача 2.

Для данного скалярного поля U и векторного поля \bar{a} найти: $\text{grad}U$; $\text{div}\bar{a}$; $\text{rot}\bar{a}$ а также $\text{div grad}U$; $\text{rot grad}U$; $\text{div rot}\bar{a}$.

1. $U = xy - \frac{x}{z}$; $\bar{a} = \{5x - 6y; x^2 + 2y; x^2 - 4z\}$
2. $U = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; $\bar{a} = \{y^2 + z^2 + 6z; e^z - 2y + x; x + y - z\}$
3. $U = x^2 - \arctg(y + z)$; $\bar{a} = \{x + z; xz + y; xy - 2\}$
4. $U = \ln(x^2 + y^2) + xyz$; $\bar{a} = \{3yz - x; x^2 - y; 6z - 1\}$
5. $U = z^2 + 2\arctg(x - y)$; $\bar{a} = \{yz - 2x; xy^2; x - 2z\}$
6. $U = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$; $\bar{a} = \{2y - x; x^2; 2\sqrt{xy}\}$
7. $U = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$; $\bar{a} = \{e^{xy}; x + z; \frac{1}{z}\}$
8. $U = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$; $\bar{a} = \{2yz; xz + 2y; x^2\}$
9. $U = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$; $\bar{a} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x + y}}; y^3; xz^2 - \right\}$
10. $U = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$; $\bar{a} = \{\sqrt{y + z}; x; x + 3\}$
11. $U = x^2 y - \sqrt{xy + z^2}$; $\bar{a} = \{x^2 y; e^{xy} - z; 3z^2\}$
12. $U = x + \ln(z^2 + y^2)$; $\bar{a} = \left\{ \ln(x^2 + y^2); \frac{1}{y}; xz - \right\}$
13. $U = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$; $\bar{a} = \{x^2 y^2; z + 3; y^2\}$
14. $U = \ln(1 + x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2}$; $\bar{a} = \{y - z; x^2 y; y^3 z\}$
15. $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\bar{a} = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2}; y^3; z^2 - \right\}$
16. $U = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$; $\bar{a} = \{\sin(x, y); \sqrt{x + y}; z^3\}$
17. $U = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}$; $\bar{a} = \left\{ \ln(x - y); \frac{2}{y}; xyz - \right\}$
18. $U = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z}$; $\bar{a} = \left\{ \arctg \frac{x}{z}; 2y; z^8 - \right\}$
19. $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z$; $\bar{a} = \left\{ \text{tg}(yx); \ln y; x^2 z^3 - \right\}$
20. $U = \arctg \frac{y}{x} + xz$; $\bar{a} = \left\{ x^2 y; \frac{y}{z}; \sin z - \right\}$
21. $U = \ln(2 + x^2) - 4yxz$; $\bar{a} = \left\{ 2x; \frac{y}{x}; (z - x)^2 - \right\}$

$$\begin{array}{ll}
22. U = x\sqrt{y} - yx^2; & \bar{a} = \left\{ \arctg x; \ln(y^2 + 1); 3z - \right\} \\
23. U = -2\ln(x^2 - 8) - 4yxz; & \bar{a} = \left\{ \cos(xz); 7y + x; \frac{y}{x} \right\} \\
24. U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}; & \bar{a} = \left\{ x \cos z; yz^3; x^2 y^3 \right\} \\
25. U = x^2 y - \sqrt{x^2 + 5z^2}; & \bar{a} = \left\{ y2^{-x}; y^{-7}; \frac{1}{z+2} \right\}
\end{array}$$

Решение типового примера.

Пример. Дано векторное поле $\bar{a} \{x + yz, y, z - x^2\}$. Найти $\operatorname{div} \bar{a}$ и $\operatorname{rot} \bar{a}$.

Решение: Из условия имеем, что $P(x, y, z) = x + yz$; $Q = (x, y, z) = y$;

$$R(x, y, z) = z - x^2$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + yz & y & z - x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z - x^2 \end{vmatrix} \bar{i} -$$

$$- \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + yz & z - x^2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x + yz & y \end{vmatrix} \bar{k} = 0 - (-2x - y)\bar{j} + (0 - z)\bar{k} = (2x + y)\bar{j} - z\bar{k}.$$

Литература

1. Высшая математика под ред. Г.Н.Яковлева. -М.: «Просвещение»,1988.
2. Гусак, А.А., Высшая математика: Т.2/ А.А. Гусак - Мн.: Изд-во «Университетское»,1984.
3. Минорский, В.П., Сборник задач по высшей математике/ В.П. Минорский.- М.: Изд-во физ. мат. лит-ры, 2003.
4. Натансон, И.П. Краткий курс высшей математики/ И.П. Натансон.- СПб.: Изд-во «Лань»,20057.
5. Пискунов, Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления/ Н.С. Пискунов. - М.: Изд-во физ. мат. лит-ры, 1987.
6. Шипачев, В.С., Основы высшей математики/ В.С. Шипачев. - М.: Высш. шк., 1994.
7. Хинчин, А.Я. Краткий курс математического анализа/А.Я. Хинчин, - М.: Изд-во технико-теоретической лит.,1955.
7. Пискунов, Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления/Н.С. Пискунов,. - М.: Изд-во физ. мат. Лит-ры, 1987.

Учебное издание

Рыжик Валентина Николаевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к расчетно-графическим работам
по
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
для студентов II курса

Редактор Павлютина И.П.

Подписано в печать 3.12.2011 г. Формат 60×84 1/16.

Бумага типографская офсетная. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 3,02. Тираж 100 экз. Изд. № 2062.

Издательство Брянской ГСХА

243365, Брянская обл., Выгоничский р-н, п. Кокино